Desigualtats matricials útils en control robust

J. Rubió–Massegú, F. Palacios–Quiñonero, Josep M. Rossell

Departament de Matemàtica Aplicada III,
Control, Dinàmica i Aplicacions (CoDALab)
Universitat Politècnica de Catalunya
Avinguda de les Bases de Manresa, 61–73, 08242 Manresa, Barcelona
josep.rubio@upc.edu, francisco.palacios@upc.edu, josep.maria.rossell@upc.edu

Resum

En aquest treball presentem un recull de les desigualtats matricials més freqüentment utilitzades en el context del control robust amb possibles retardaments, a temps continu o discret. Juntament amb les demostracions de les desigualtats, també s'inclou una breu descripció d'altres materials d'interès, com són els complements de Schur i la fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury.

1 Introducció

En aquest treball establim algunes desigualtats matricials útils en el context del control robust, quan les incerteses en les matrius són del tipus

$$\Delta A = HFE,$$

on H i E són matrius conegudes i F és una matriu desconeguda (matriu d'incerteses) que compleix $F^T F \leq I$, on I és una matriu identitat de mida adequada. Citarem [1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16] com a exemples de treballs on s'han fet servir part d'aquestes desigualtats per determinar control·ladors a partir de funcions de Lyapunov. Les demostracions d'algunes desigualtats es poden trobar en [8, 11, 13].

Degut al gran volum d'articles que es troben a la literatura i a les referències entrecreuades entre ells, sovint es fa difícil discernir entre les referències originals que contenen les demostracions de les desigualtats i les que no. És per aquest motiu, i també per la conveniència de tenir les desigualtats en un únic text, que aquí hem recollit les que hem cregut més rellevants i les seves demostracions.

El treball està organitzat com segueix. A la Secció 2 establim alguns resultats preliminars. La Secció 3 presenta les desigualtats matricials i la Secció 4 les seves demostracions. També hem cregut convenient incloure dos apèndixs: un sobre complements de Schur i l'altre sobre el lema d'inversió de matrius o fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury.

2 Alguns resultats preliminars

Tots els vectors i matrius que considerarem seran a coeficients reals. La norma euclidiana d'un vector $x \in \mathbb{R}^n$ la denotem $||x|| = \sqrt{x^T x}$. Si A és una matriu quadrada, el conjunt format per tots els seus valors propis, l'*espectre* de A, l'escrivim $\sigma(A) = \{\lambda : \lambda \text{ valor propi de } A\}$. El *radi espectral* $\rho(A)$ és el mòdul més gran dels valors propis de A, i.e. $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$. A part de propietats elementals com $\sigma(A) = \sigma(A^T)$, $\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\}$, $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$ essent $P = P(x)$ un polinomi, etc, farem ús del fet que $\sigma(AB) - \{0\} = \sigma(BA) - \{0\}$ sempre que els productes AB i BA tinguin sentit. Això implica que $\rho(AB) = \rho(BA)$.

Per a una matriu qualsevol A, no necessàriament quadrada, la *norma espectral* de A és la norma matricial associada a la norma euclidiana. És a dir,

$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \max_{||x||=1} ||Ax||.$$

La norma espectral coincideix amb l'arrel quadrada del radi espectral de la matriu $A^T A$, i.e.,

$$||A|| = \sqrt{\rho(A^T A)}.$$

Es compleix que $||A|| = ||A^T||$, ja que $\rho(A^T A) = \rho(AA^T)$. Si A és simètrica aleshores $||A|| = \rho(A)$.

Per a matrius simètriques de la mateixa mida, escriurem $A \leq B$ (resp. $A < B$) per indicar que la matriu $B - A$ és semidefinida positiva (resp. definida positiva). Algunes propietats elementals són: (i) $A + A' \leq B + B'$ si $A \leq B$ i $A' \leq B'$, amb desigualtat estricta quan $A < B$ o $A' < B'$, (ii) $\alpha A \leq \beta A$ per a tota matriu $A \geq 0$ i qualssevol escalars α i β tals que $\alpha \leq \beta$ ($\alpha A < \beta A$ si $A > 0$ i $\alpha < \beta$), (iii) $\alpha A \leq \alpha B$ si A i B són matrius tals que $A \leq B$, i $\alpha \geq 0$ és un escalar ($\alpha A < \alpha B$ si $A < B$ i $\alpha > 0$), (iv) Si $A > 0$ aleshores A és invertible i $A^{-1} > 0$.

Lema 1 *Es satisfan els apartats següents.*

(a) Si A i B són matrius simètriques de mida $n \times n$ tals que $A \leq B$, aleshores $M^T AM \leq M^T BM$ on M és qualsevol matriu de mida $n \times p$. La desigualtat és estricta si $A < B$ i M té rang p.

(b) Siguin A i B matrius amb el mateix nombre n de files. Aleshores $A^T A \leq B^T B$ si i només si $||Ax|| \leq ||Bx||$ per a tot $x \in \mathbb{R}^n$. També es compleix que $A^T A < B^T B$ si i només si $||Ax|| < ||Bx||$ per a tot $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

(c) Per a qualsevol matriu A i qualsevol escalar $a \geq 0$ són equivalents: (i) $A^T A \leq a^2 I$, (ii) $AA^T \leq a^2 I$, (iii) $||A|| \leq a$. En particular

$$A^T A \leq ||A||^2 I, \text{ per a tota matriu } A.$$

D'altra banda, les condicions següents també són equivalents: (i) $A^TA < a^2I$*, (ii)* $AA^T < a^2I$*, (iii)* $||A|| < a$*.*

(d) Siguin A *i* B *matrius de mida* $n \times n$ *amb* A *simètrica i* $B > 0$*. Aleshores* $-B \leq A \leq B$ *si i només si* $\rho(AB^{-1}) \leq 1$*. També es compleix que* $-B < A < B$ *si i només si* $\rho(AB^{-1}) < 1$*.*

(e) $N^TF^TFN \leq ||F||^2N^TN$ *si* F *i* N *són matrius tals que el producte* FN *té sentit. En particular,*

$$N^TF^TFN \leq N^TN, \text{ si } ||F|| \leq 1.$$

Demostració. Vegem (a). Sigui $x \in \mathbb{R}^n$. Llavors $x^TM^TAMx = (Mx)^TA(Mx) \leq (Mx)^TB(Mx) = x^TM^TBMx$, d'on $M^TAM \leq M^TBM$. Si a més $A < B$ i M té rang p (i en conseqüència $Mx \neq 0$ per a tot $x \neq 0$), aleshores $x^TM^TAMx = (Mx)^TA(Mx) < (Mx)^TB(Mx) = x^TM^TBMx$, d'on $M^TAM < M^TBM$.

L'apartat (b) prové d'observar que $x^TA^TAx = ||Ax||^2$ i $x^TB^TBx = ||Bx||^2$.

Vegem (c). Els valors propis de la matriu $a^2I - A^TA$ són els de la forma $a^2 - \lambda$ amb $\lambda \in \sigma(A^TA)$. Així, la condició $a^2I - A^TA \geq 0$ equival a $\lambda \leq a^2$ per a tot $\lambda \in \sigma(A^TA)$, o a $\rho(A^TA) \leq a^2$ ja que els valors propis de A^TA són reals i positius en ser A^TA simètrica i semidefinida positiva. Això equival a $||A|| \leq a$. Com que $||A|| = ||A^T||$, també resulta que $AA^T \leq a^2I$ si i només si $||A|| \leq a$. Amb desigualtats estrictes la demostració és anàlega.

Anem a veure l'apartat (d). Sigui $B = S^TS$ amb S matriu quadrada i invertible. Per S^{-T} denotem la matriu $S^{-T} := (S^{-1})^T = (S^T)^{-1}$. Tenint en compte l'apartat (a), podem pre i post multiplicar la desigualtat $-B \leq A \leq B$ per S^{-T} i S^{-1} respectivament, obtenint que $-B \leq A \leq B$ si i només si $-Id \leq S^{-T}AS^{-1} \leq Id$. De manera semblant al raonament que hem fet a l'apartat (c), aquesta darrera desigualtat equival a $\sigma(S^{-T}AS^{-1}) \subseteq [-1, 1]$, o a $\rho(S^{-T}AS^{-1}) \leq 1$. Finalment només cal observar que

$$\rho(S^{-T}AS^{-1}) = \rho(AS^{-1}S^{-T}) = \rho(AB^{-1}).$$

Amb desigualtats estrictes la demostració és anàlega.

Per veure l'apartat (e) utilitzem que $F^TF \leq ||F||^2Id$ i ara apliquem l'apartat (a), d'on resulta que $N^TF^TFN \leq N^T(||F||^2Id)N = ||F||^2N^TN$. □

Una conseqüència immediata de l'apartat (c) és que per a qualsevol matriu F, la condició $||F|| \leq 1$ equival a $F^TF \leq I$, i també a $FF^T \leq I$.

Comentaris 2 Acabarem aquest apartat amb les observacions següents:

(i) Una demostració alternativa de l'apartat (c) és fent servir que $a^2I = (aI)^T(aI)$, d'on resulta (aplicant l'apartat (b)) que $A^TA \leq a^2I$ si i només si $||Ax|| \leq ||(aI)x|| = a||x||$ per a tot x, i això equival a $||A|| \leq a$. Com que $||A|| = ||A^T||$, també s'obté que $AA^T \leq a^2 I$ si i només si $||A|| \leq a$. Amb desigualtats estrictes la demostració és anàlega només que cal tenir en compte que $||A|| = ||Ax||$ per algun x amb $||x|| = 1$.

(ii) L'apartat (e) també es podria haver demostrat observant que $N^T F^T F N \leq ||F||^2 N^T N$ si i només si $(FN)^T(FN) \leq (||F||N)^T(||F||N)$. Per l'apartat (b) això equival a $||FNx|| \leq ||(||F||N)x||$ per a tot x, i això és cert ja que $||FNx|| \leq ||F||\ ||Nx|| = ||(||F||N)x||$.

3 Desigualtats matricials

Les desigualtats següents s'han d'interpretar en el sentit més ampli possible, és a dir, amb les hipòtesis mínimes perque tinguin sentit. Per exemple, si escrivim $ABC \leq D$ volem dir que existeix el producte matricial ABC, que tant ABC com D són matrius quadrades, simètriques, i que $ABC \leq D$.

Teorema 3 *Siguin M, N, F i X matrius, x, y vectors i $\epsilon > 0$ un escalar. Aleshores:*

(1) $|2x^T F y| \leq ||F||(\epsilon x^T x + \frac{1}{\epsilon} y^T y)$. *A més,*

(1.1) $|2x^T X y| \leq \epsilon x^T X x + \frac{1}{\epsilon} y^T X y$, *si* $X \geq 0$.

(1.2) $|2x^T y| \leq \epsilon x^T X^{-1} x + \frac{1}{\epsilon} y^T X y$, *si* $X > 0$.

(2) $|2x^T M y| \leq \epsilon x^T M M^T x + \frac{1}{\epsilon} y^T y$. *També es compleix*

(2.1) $|2x^T M X y| \leq \epsilon x^T M X M^T x + \frac{1}{\epsilon} y^T X y$ *si* $X \geq 0$.

(2.2) $|2x^T M y| \leq \epsilon x^T M X^{-1} M^T x + \frac{1}{\epsilon} y^T X y$, *si* $X > 0$.

(3) $|2x^T M^T N y| \leq \epsilon x^T M^T M x + \frac{1}{\epsilon} y^T N^T N y$. *També es compleix*

(3.1) $|2x^T M^T X N y| \leq \epsilon x^T M^T X M x + \frac{1}{\epsilon} y^T N^T X N y$ *si* $X \geq 0$.

(3.2) $|2x^T M^T N y| \leq \epsilon x^T M^T X^{-1} M x + \frac{1}{\epsilon} y^T N^T X N y$, *si* $X > 0$.

(4) $M^T N + N^T M \leq \epsilon M^T M + \frac{1}{\epsilon} N^T N$. *També es compleix*

(4.1) $M^T X N + N^T X M \leq \epsilon M^T X M + \frac{1}{\epsilon} N^T X N$ *si* $X \geq 0$.

(4.2) $M^T N + N^T M \leq \epsilon M^T X^{-1} M + \frac{1}{\epsilon} N^T X N$, *si* $X > 0$.

(5) $|2x^T M F N y| \leq \epsilon x^T M M^T x + \frac{1}{\epsilon} ||F||^2 y^T N^T N y$.

(6) $MFN + (MFN)^T \leq \epsilon M M^T + \frac{1}{\epsilon} ||F||^2 N^T N$.

(7) $(MFN)^T(MFN) \leq \alpha^2 N^T N$ *amb* $\alpha = ||M||\ ||F||$.

(8) Es compleix

$$(A+LFE)X(A+LFE)^T \leq AXA^T + AXE^T(\epsilon I - EXE^T)^{-1}EXA^T + \epsilon||F||^2 LL^T$$

on A, L, F, E *i* X *són matrius tals que* $X \geq 0$ *i* $EXE^T < \epsilon I$.

(9) Es compleix

$$(A+LFE)X(A+LFE)^T \leq A\left(X^{-1} - \frac{1}{\epsilon}E^T E\right)^{-1} A^T + \epsilon||F||^2 LL^T$$

on A, L, F, E *i* X *són matrius tals que* $X > 0$ *i* $E^T E < \epsilon X^{-1}$.

Comentaris 4 (i) Quan $X > 0$, la condició $EXE^T < \epsilon I$ de l'apartat (8) i la condició $E^T E < \epsilon X^{-1}$ de l'apartat (9) són equivalents. En efecte, aplicant complements de Schur, la condició $EXE^T < \epsilon I$ equival a $M > 0$, on

$$M = \begin{pmatrix} \epsilon I & E \\ E^T & X^{-1} \end{pmatrix},$$

(veure Apèndix A per a complements de Schur). Com que $\epsilon I > 0$ podem tornar a aplicar complements de Schur, obtenint que $EXE^T < \epsilon I$ si i només si $X^{-1} - \frac{1}{\epsilon}E^T E > 0$, és a dir $E^T E < \epsilon X^{-1}$.

(ii) Si $||F|| \leq 1$, de (1), (5), (6), (7), (8) i (9) s'obtenen les desigualtats següents:

$$\begin{aligned}
|2x^T F y| &\leq \epsilon x^T x + \frac{1}{\epsilon} y^T y \\
|2x^T MFNy| &\leq \epsilon x^T MM^T x + \frac{1}{\epsilon} y^T N^T N y \\
(MFN) + (MFN)^T &\leq \epsilon MM^T + \frac{1}{\epsilon} N^T N \\
(MFN)^T(MFN) &\leq \alpha^2 N^T N \text{ amb } \alpha = ||M|| \\
(A+LFE)X(A+LFE)^T &\leq AXA^T + AXE^T(\epsilon I - EXE^T)^{-1}EXA^T + \epsilon LL^T \\
(A+LFE)X(A+LFE)^T &\leq A\left(X^{-1} - \frac{1}{\epsilon}E^T E\right)^{-1} A^T + \epsilon LL^T
\end{aligned}$$

Ara establim algunes desigualtats entre matrius definides per blocs.

Proposició 5 (Desigualtat de Moon) *Es compleix*

$$-2x^T N y \leq \begin{pmatrix} x^T & y^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B - N \\ B^T - N^T & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

sempre que x, y siguin vectors,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & D \end{pmatrix} \geq 0$$

i N sigui una matriu de les mateixes dimensions que B.

Finalment establim el següent resultat.

Proposició 6 *Siguin U i V les matrius*

$$U = U(E) \;=\; \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24}+E & M_{25} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} \\ M_{41} & M_{42}+E^T & M_{43} & M_{44} & M_{45} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} \end{pmatrix},$$

$$V = V(F,G) \;=\; \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ M_{21} & M_{22}+F & M_{23} & M_{24} & M_{25} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44}+G & M_{45} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} \end{pmatrix},$$

on les matrius E, F i G tenen dimensions apropiades i els blocs M_{ij} compleixen $M_{ij}^T = M_{ji}$ per a $1 \leq i, j \leq 5$. Es satisfan els apartats següents, vàlids per a qualssevol matrius A i B de dimensions apropiades i qualsevol escalar $\epsilon > 0$:

(1) $U(AB^T) \leq V\left(\epsilon AA^T, \frac{1}{\epsilon}BB^T\right)$.

(2) $U(AXB^T) \leq V\left(\epsilon AXA^T, \frac{1}{\epsilon}BXB^T\right)$, *si* $X \geq 0$.

(3) $U(AB^T) \leq V\left(\epsilon AX^{-1}A^T, \frac{1}{\epsilon}BXB^T\right)$, *si* $X > 0$.

4 Demostracions

4.1 Demostració del Teorema 3

Començem provant l'apartat (7). Per l'apartat (e) del Lema 1,

$$(MFN)^T(MFN) = N^T(MF)^T(MF)N \leq ||MF||^2 N^T N.$$

Tenint en compte que $||AB|| \leq ||A||\ ||B||$ si A i B són matrius, obtenim

$$(MFN)^T(MFN) \leq (||M||\ ||F||)^2 N^T N = \alpha^2 N^T N,$$

i l'apartat (7) està provat.

Els apartats (5) i (6) són conseqüència dels apartats (3) i (4) respectivament. En efecte,

$$\begin{aligned}
|2x^TMFNy| &= |2x^TM(FN)y| \\
&\leq \epsilon x^TMM^Tx + \frac{1}{\epsilon}y^T(FN)^T(FN)y \\
&= \epsilon x^TMM^Tx + \frac{1}{\epsilon}y^TN^TF^TFNy \\
&\leq \epsilon x^TMM^Tx + \frac{1}{\epsilon}||F||^2y^TN^TNy,
\end{aligned}$$

on en l'últim pas hem fet servir l'apartat (e) del Lema 1. De manera similar l'apartat (6) es demostra a partir de l'apartat (4), o també fent servir que $x^T[(MFN) + (MFN)^T]x = 2x^TMFNx$ i aplicant l'apartat (5) amb $x = y$.

Els apartats (2), (2.1) i (2.2) s'obtenen aplicant (3), (3.1) i (3.2) a les matrius $\tilde{M} = M^T$ i $\tilde{N} = I$. Per altra banda, (1.1), (1.2), (3.1), (3.2), (4.1) i (4.2) són conseqüència de (1), (3) i (4). En efecte, sigui $X = L^TL$ amb L matriu quadrada. Aplicant (1), (3) i (4) resulta

$$\begin{aligned}
|2x^TXy| &= |2(Lx)^T(Ly)| \\
&\leq \epsilon(Lx)^T(Lx) + \frac{1}{\epsilon}(Ly)^T(Ly) \\
&= \epsilon x^TXx + \frac{1}{\epsilon}y^TXy, \\
|2x^TM^TXNy| &= |2x^T(LM)^T(LN)y| \\
&\leq \epsilon x^T(LM)^T(LM)x + \frac{1}{\epsilon}y^T(LN)^T(LN)y \\
&= \epsilon x^TM^TXMx + \frac{1}{\epsilon}y^TN^TXNy, \\
M^TXN + N^TXM &= (LM)^T(LN) + (LN)^T(LM) \\
&\leq \epsilon(LM)^T(LM) + \frac{1}{\epsilon}(LN)^T(LN) \\
&= \epsilon M^TXM + \frac{1}{\epsilon}N^TXN,
\end{aligned}$$

i això prova (1.1), (3.1) i (4.1). Suposem que $X > 0$. Aplicant (1.1), (3.1) i (4.1) resulta

$$\begin{aligned}
|2x^Ty| &= |2(X^{-1}x)^TXy| \\
&\leq \epsilon(X^{-1}x)^TX(X^{-1}x) + \frac{1}{\epsilon}y^TXy \\
&= \epsilon x^TX^{-1}x + \frac{1}{\epsilon}y^TXy,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|2x^TM^TNy| &= |2x^T(X^{-1}M)^TXNy| \\
&\leq \epsilon x^T(X^{-1}M)^TX(X^{-1}M)x+\frac{1}{\epsilon}y^TN^TXNy \\
&= \epsilon x^TM^TX^{-1}Mx+\frac{1}{\epsilon}y^TN^TXNy, \\
M^TN+N^TM &= (X^{-1}M)^TXN+N^TX(X^{-1}M) \\
&\leq \epsilon(X^{-1}M)^TX(X^{-1}M)+\frac{1}{\epsilon}N^TXN \\
&= \epsilon M^TX^{-1}M+\frac{1}{\epsilon}N^TXN,
\end{aligned}
$$

obtenint (1.2), (3.2) i (4.2).

Per tant només queda demostrar els apartats (1), (3), (4), (8) i (9).

Comentaris 7 Una demostració directa de (1.1) és fer servir que $0 \leq (x-y)^TX(x-y) = x^TXx+y^TXy-2x^TXy$, d'on $2x^TXy \leq x^TXx+y^TXy$. Aquesta desigualtat aplicada als vectors x i $-y$ mostra que $-2x^TXy \leq x^TXx+y^TXy$ i en conseqüència $|2x^TXy| \leq x^TXx+y^TXy$. Aplicant aquesta desigualtat als vectors $\sqrt{\epsilon}x$ i $y/\sqrt{\epsilon}$ obtenim que $|2x^TXy| \leq \epsilon x^TXx+\frac{1}{\epsilon}y^TXy$, i això demostra (1.1).

Les desigualtats (1), (3) i (4) són conseqüència del lema següent.

Lema 8 *Siguin M, N, F matrius i x, y vectors. Aleshores*

(i) $2x^TFy \leq ||F||(x^Tx+y^Ty)$

(ii) $2x^TM^TNy \leq x^TM^TMx+y^TN^TNy$

(iii) $M^TN+N^TM \leq M^TM+N^TN$

Demostració. Provem (i). De la desigualtat de Cauchy-Schwartz resulta $2x^TFy \leq 2||x||\,||Fy|| \leq 2||F||\,||x||\,||y||$. Fent servir que $2ab \leq a^2+b^2$ si a i b són nombres reals, obtenim

$$2x^TFy \leq 2||F||\;||x||\;||y|| \leq ||F||(||x||^2+||y||^2) = ||F||(x^Tx+y^Ty).$$

Segona demostració de (i). Està basada en complements de Schur. La desigualtat equival a $||F||x^Tx+||F||y^Ty-x^TFy-y^TF^Tx \geq 0$, o a $\begin{pmatrix} x^T & y^T \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$ amb

$$M = \begin{pmatrix} ||F||I & -F \\ -F^T & ||F||I \end{pmatrix}.$$

Per tant tot es redueix a provar que $M \geq 0$. Quan $F = 0$ això és trivial. Si $F \neq 0$ resulta $||F||I > 0$ i el complement de Schur de la matriu $||F||I$ en el costat inferior dret de M és $S = ||F||I - \frac{1}{||F||}FF^T$. Com que $FF^T \leq ||F||^2 I$ és $S \geq 0$, i en conseqüència $M \geq 0$.

Demostració de (ii). Aplicant (i) amb $F = I$ tenim que

$$2x^T M^T N y = 2(Mx)^T(Ny) \leq (Mx)^T(Mx) + (Ny)^T(Ny) = x^T M^T M x + y^T N^T N y.$$

Segona demostració de (ii). La desigualtat equival a $x^T M^T M x + y^T N^T N y - x^T M^T N y - y^T N^T M x \geq 0$, o a $\begin{pmatrix} x^T & y^T \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$ amb

$$U = \begin{pmatrix} M^T M & -M^T N \\ -N^T M & N^T N \end{pmatrix}.$$

És suficient veure que $U \geq 0$, però això és trivial atès que $U = L^T L$ amb $L = (M \ -N)$.

Demostració de (iii). Per (ii) és

$$x^T(M^T N + N^T M)x = 2x^T M^T N x \leq x^T M^T M x + x^T N^T N x = x^T(M^T M + N^T N)x,$$

i per tant $M^T N + N^T M \leq M^T M + N^T N$.

Segona demostració de (iii). $0 \leq (M - N)^T(M - N) = M^T M + N^T N - M^T N - N^T M$, d'on $M^T N + N^T M \leq M^T M + N^T N$. $\square$

Anem a veure la desigualtat (1) del teorema. Aplicant l'apartat (i) del Lema 8 als vectors $\sqrt{\epsilon}x$ i $y/\sqrt{\epsilon}$ obtenim

$$2x^T F y \leq ||F||(\epsilon x^T x + \frac{1}{\epsilon} y^T y).$$

Aquesta desigualtat aplicada als vectors x i $-y$ mostra que

$$-2x^T F y \leq ||F||(\epsilon x^T x + \frac{1}{\epsilon} y^T y),$$

d'on resulta $|2x^T F y| \leq ||F||(\epsilon x^T x + \frac{1}{\epsilon} y^T y)$ i la desigualtat (1) del teorema està provada.

Un raonament anàleg (però ara aplicant l'apartat (ii) del Lema 8) demostra la desigualtat (3). Finalment, si apliquem l'apartat (iii) del Lema 8 a les matrius $\sqrt{\epsilon}M$ i $N/\sqrt{\epsilon}$ obtenim la desigualtat (4).

Només queda demostrar els apartats (8) i (9). Per provar (8) necessitem el lema següent.

Lema 9 *Es satisfà*

$$(A + LE)(A + LE)^T \le AA^T + AE^T(I - EE^T)^{-1}EA^T + LL^T$$

on A, L i E són matrius qualssevol tals $EE^T < I$ (és a dir, $||E|| < 1$).

Demostració. Aplicant l'apartat (4.2) amb $X = I - EE^T$ resulta

$$\begin{aligned} AE^TL^T + LEA^T &= (EA^T)^TL^T + (L^T)^TEA^T \\ &\le (EA^T)^T(I - EE^T)^{-1}EA^T + (L^T)^T(I - EE^T)L^T \\ &= AE^T(I - EE^T)^{-1}EA^T + L(I - EE^T)L^T, \end{aligned}$$

i per tant

$$\begin{aligned} (A + LE)(A + LE)^T &= AA^T + AE^TL^T + LEA^T + LEE^TL^T \\ &\le AA^T + AE^T(I - EE^T)^{-1}EA^T + L(I - EE^T)L^T + LEE^TL^T \\ &= AA^T + AE^T(I - EE^T)^{-1}EA^T + LL^T. \end{aligned}$$

Això completa la demostració del lema. □

Siguin ara A, L, F, E, X i ϵ com en l'apartat (8) del teorema. Sigui $X = RR^T$ amb R matriu quadrada. Llavors

$$\begin{aligned} (A + LFE)X(A + LFE)^T &= (AR + LFER)(AR + LFER)^T \\ &= \left[AR + (\sqrt{\epsilon}LF)\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}ER\right)\right]\left[AR + (\sqrt{\epsilon}LF)\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}ER\right)\right]^T. \end{aligned}$$

Com que $\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}ER\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}ER\right)^T = \frac{1}{\epsilon}EXE^T < I$, podem aplicar el Lema 9 obtenint

$$\begin{aligned} (A + LFE)X(A + LFE)^T &\le AR(AR)^T + Q + (\sqrt{\epsilon}LF)(\sqrt{\epsilon}LF)^T \\ &= AXA^T + Q + \epsilon LFF^TL^T \end{aligned}$$

amb

$$\begin{aligned} Q &= AR\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}ER\right)^T\left[I - \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}ER\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}ER\right)^T\right]^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}ER\right)(AR)^T \\ &= ARR^TE^T(\epsilon I - ERR^TE^T)^{-1}ERR^TA^T \\ &= AXE^T(\epsilon I - EXE^T)^{-1}EXA^T. \end{aligned}$$

De tot això resulta

$$\begin{aligned} (A + LFE)X(A + LFE)^T &\le AXA^T + AXE^T(\epsilon I - EXE^T)^{-1}EXA^T + \epsilon LFF^TL^T \\ &\le AXA^T + AXE^T(\epsilon I - EXE^T)^{-1}EXA^T + \epsilon||F||^2LL^T \end{aligned}$$

i això completa la demostració de l'apartat (8) del teorema.

Per demostrar l'apartat (9) necessitem una identitat matricial coneguda i anomenada *lema d'inversió de matrius* o *fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury*. A l'apèndix B donem una demostració senzilla d'aquest lema.

Lema 10 *Siguin A, U, B i V matrius tals que A i B són quadrades i tenen inversa. Si alguna de les matrius $A-UBV$, $B^{-1}-VA^{-1}U$ és invertible, l'altre també i es satisfà la identitat*

$$(A-UBV)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U\left(B^{-1}-VA^{-1}U\right)^{-1}VA^{-1}.$$

Anem a veure l'apartat (9). La condició $E^TE < \epsilon X^{-1}$ de l'apartat (9) equival a $EXE^T < \epsilon I$ (veure els comentaris que segueixen a l'enunciat del Teorema 3). Podem aplicar, per tant, l'apartat (8), obtenint

$$\begin{aligned}(A+LFE)X(A+LFE)^T &\leq AXA^T + AXE^T(\epsilon I - EXE^T)^{-1}EXA^T + \epsilon||F||^2LL^T \\ &= A\left[X + XE^T(\epsilon I - EXE^T)^{-1}EX\right]A^T + \epsilon||F||^2LL^T.\end{aligned}$$

Finalment només cal observar que pel Lema 10 és

$$X + XE^T\left(\epsilon I - EXE^T\right)^{-1}EX = \left(X^{-1} - E^T\left(\frac{1}{\epsilon}I\right)E\right)^{-1} = \left(X^{-1} - \frac{1}{\epsilon}E^TE\right)^{-1}.$$

Hem demostrat l'apartat (9) i això completa la demostració del Teorema 3.

4.2 Demostració de les proposicions 5 i 6

La Proposició 5 s'obté s'observar que

$$\begin{pmatrix} 0 & -N \\ -N^T & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -N \\ -N^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B-N \\ B^T-N^T & D \end{pmatrix},$$

resultant que

$$\begin{aligned} -2x^TNy &= \begin{pmatrix} x^T & y^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -N \\ -N^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\leq \begin{pmatrix} x^T & y^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B-N \\ B^T-N^T & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Anem a veure la Proposició 6. L'apartat (1) és una conseqüència del fet que

$$V(\epsilon AA^T, \tfrac{1}{\epsilon}BB^T) - U(AB^T) = L^TL \geq 0$$

amb

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\epsilon}A^T & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}B^T & 0 \end{pmatrix}.$$

L'apartat (2) es demostra posant $X = RR^T$ amb R matriu quadrada i aplicant l'apartat (1) a les matrius $\tilde{A} = AR$ i $\tilde{B} = BR$. Finalment, l'apartat (3) prové d'aplicar l'apartat (2) a les matrius $\tilde{A} = AX^{-1}$, $\tilde{B} = B$ i $\tilde{X} = X$.

Apèndix A: Complements de Schur i matrius (semi)definides positives

Els complements de Schur són una eina molt potent de l'àlgebra lineal. Un bon recull de les seves propietats pot trobar-se a [5]. Nosaltres només necessitarem les que fan referència a matrius (semi)definides positives.

Sigui M una matriu quadrada definida per blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{1}$$

on D és una matriu quadrada i invertible. Es defineix el *complement de Schur* de D com

$$S(D) = A - BD^{-1}C.$$

Teorema 11 *Sigui M la matriu simètrica*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & D \end{pmatrix}$$

amb $A = A^T$ i $D = D^T$. Si D és invertible, aleshores:

(i) $M > 0$ si i només si $D > 0$ i $S(D) > 0$.

(ii) $M \geq 0$ si i només si $D > 0$ i $S(D) \geq 0$.

Demostració. Per a una matriu quadrada M com en (1) (no necessàriament simètrica), amb D invertible, es satisfà la identitat

$$\begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(D) & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

on les submatrius zero i identitat tenen les dimensions apropiades. En el nostre cas, en ser M simètrica les matrius que multipliquen M a la dreta i a l'esquerra són traspostes l'una de l'altra i invertibles. A més a més, el complement de Schur de D és una matriu simètrica. Sigui

$N = diag(S(D), D)$. Per l'apartat (a) del Lema 1 és $M > 0$ (resp. $M \geq 0$) si i només si $N > 0$ (resp. $N \geq 0$), i en ser N diagonal per blocs això equival a $D > 0$ i $S(D) > 0$ (resp. $D \geq 0$ i $S(D) \geq 0$). Finalment observem que en l'apartat (ii) és $D > 0$, ja que per hipòtesi D és invertible. □

El complement de Schur pot formar-se respecte qualsevol submatriu invertible de M, no necessàriament la del costat inferior dreta de M. Sigui M una matriu qualsevol de mida $n \times n$. Siguin α i β conjunts d'índexs, és a dir subconjunts de $\{1, \ldots, n\}$. El cardinal d'un conjunt d'índexs l'escrivim $|\alpha|$, i el seu complementari $\alpha^c = \{1, \ldots, n\} - \alpha$. Sigui $M[\alpha, \beta]$ la submatriu de M obtinguda com a intersecció de les files de M indexades per α i columnes de M indexades per β. Sovint escriurem $M[\alpha]$ en lloc de $M[\alpha, \alpha]$. Si $|\alpha| = |\beta|$ i $M[\alpha, \beta]$ és invertible, es defineix el complement de Schur de $M[\alpha, \beta]$ com

$$S(M[\alpha, \beta]) = M[\alpha^c, \beta^c] - M[\alpha^c, \beta](M[\alpha, \beta])^{-1} M[\alpha, \beta^c]$$

Aquesta definició coincideix amb la donada abans per a la submatriu D de (1). Altres complements de Schur per a la matriu M de (1) són $S(A) = D - CA^{-1}B$, $S(B) = C - DB^{-1}A$ i $S(C) = B - AC^{-1}D$, sempre que A, B i C siguin matrius quadrades i invertibles.

Teorema 12 *Sigui M una matriu simètrica d'ordre n i sigui $\alpha \subseteq \{1, \ldots, n\}$ un conjunt d'índexs tal que la submatriu $M[\alpha]$ és invertible. Aleshores*

(i) $M > 0$ si i només si $M[\alpha] > 0$ i $S(M[\alpha]) > 0$.

(ii) $M \geq 0$ si i només si $M[\alpha] > 0$ i $S(M[\alpha]) \geq 0$.

Demostració. Siguin α i β conjunts d'índexs. Mitjançant permutacions de files i columnes de M, podem "transportar" $M[\alpha, \beta]$ al costat inferior dreta de la matriu M. És a dir, existeixen matrius permutació P i Q tals que

$$PMQ = \begin{pmatrix} M[\alpha^c, \beta^c] & M[\alpha^c, \beta] \\ M[\alpha, \beta^c] & M[\alpha, \beta] \end{pmatrix}$$

Quan $\alpha = \beta$, les permutacions de files i columnes són les mateixes, i això té la conseqüència que $P = Q^T$, resultant que

$$Q^T M Q = \tilde{M} := \begin{pmatrix} M[\alpha^c] & M[\alpha^c, \alpha] \\ M[\alpha, \alpha^c] & M[\alpha] \end{pmatrix}$$

Per l'apartat (a) del Lema 1 és $M > 0$ si i només si $\tilde{M} > 0$, i pel Teorema 11 això equival a $M[\alpha] > 0$ i $S(M[\alpha]) > 0$. De la mateixa manera es veu que $M \geq 0$ si i només si $M[\alpha] > 0$ i $S(M[\alpha]) \geq 0$. □

Apèndix B: El lema d'inversió de matrius

El lema d'inversió de matrius, Lema 10, o fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury, és una conseqüència immediata del resultat següent. Altres generalitzacions del lema d'inversió de matrius poden consultar-se en [4].

Lema 13 *Siguin A, U, B i V matrius d'ordres $n \times n$, $n \times p$, $p \times q$ i $q \times n$ respectivament. Suposem que la matriu A té inversa. Si alguna de les matrius $A - UBV$, $I - BVA^{-1}U$ és invertible, l'altre també i es satisfà la identitat*

$$(A - UBV)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U \left(I - BVA^{-1}U\right)^{-1} BVA^{-1}. \tag{2}$$

El Lema 13 implica el Lema 10, ja que si B és quadrada i invertible aleshores

$$I - BVA^{-1}U = B(B^{-1} - VA^{-1}U), \tag{3}$$

de manera que la matriu $I - BVA^{-1}U$ és no singular si i només si la matriu $B^{-1} - VA^{-1}U$ és no singular. Aplicant inverses en (3) i substituïnt en (2) obtenim la identitat del Lema 10.

Per provar el Lema 13 necessitem el resultat següent.

Lema 14 *Siguin A i B matrius d'ordres $n \times m$ i $m \times n$ respectivament. Si alguna de les matrius $I - AB$ o $I - BA$ és invertible, l'altre també i es satisfà la identitat*

$$(I - AB)^{-1} = I + A(I - BA)^{-1}B.$$

Demostració. Que la matriu $I - AB$ tingui inversa equival a dir que $\lambda = 1$ no és valor propi de AB. Com que els valors propis no nuls de AB i de BA són els mateixos, també equival a que la matriu $I - BA$ tingui inversa. Anem a veure la identitat de l'enunciat. Multiplicant els dos costats de la igualtat per $I - AB$ i fent alguna manipulació, el què hem de veure és

$$AB = A(I - BA)^{-1}B(I - AB),$$

i això és trivial ja que $B(I - AB) = (I - BA)B$, i per tant $A(I - BA)^{-1}B(I - AB) = A(I - BA)^{-1}(I - BA)B = AB$. $\square$

Demostració del Lema 13. Com que $A - UBV = A(I - A^{-1}UBV)$, la matriu $A - UBV$ té inversa si i només si la matriu $I - A^{-1}UBV$ té inversa. Pel Lema 14 això equival a que la matriu $I - BVA^{-1}U$ tingui inversa. Aplicant el Lema 14 a les matrius $\tilde{A} = A^{-1}U$ i $\tilde{B} = BV$, i tenint en compte que $(A - UBV)^{-1} = (I - A^{-1}UBV)^{-1}A^{-1}$, obtenim

$$\begin{aligned} (A - UBV)^{-1} &= \left[I + A^{-1}U \left(I - BVA^{-1}U\right)^{-1} BV\right] A^{-1} \\ &= A^{-1} + A^{-1}U \left(I - BVA^{-1}U\right)^{-1} BVA^{-1}, \end{aligned}$$

i això completa la demostració del Lema 13. □

AGRAÏMENTS: Aquest treball està finançat parcialment pel CICYT dintre del projecte DPI2008-06699-C02-02.

Referències

[1] W.-H. Chen, Z.-H. Guan, X. Lu, Delay-dependent guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems with delay, *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, **150** (2003), 412–416.

[2] H. Du, J. Lam, K. Y. Sze, Non–fragile H_∞ vibration control for uncertain structural systems, *Journal of Sound and Vibration*, **273** (2004), 1031–1045.

[3] X. Guan, Z. Lin, G. Duan, Robust guaranteed cost control for discrete-time uncertain systems with delay, *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, **146** (1999), 598–602.

[4] H. V. Henderson, S. R. Searle, On deriving the inverse of a sum of matrices, *SIAM Review*, **23** (1981), 53–60.

[5] R. A. Horn, F. Zhang, Basic Properties of the Schur Complement, a *The Schur Complement and its Applications* (Ed. F. Zhang), Numerical Methods and Algorithms, Vol 4, Springer, 2005.

[6] M. Hua, F. Deng, X. Liu, Y. Peng, Robust delay-dependent exponential stability of uncertain stochastic system with time-varying delay, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, **29** (2010), 515–526.

[7] X. Li, C. E. De Souza, Criteria for robust stability and stabilization of uncertain linear systems with state delay, *Automatica*, **33** (1997), 1657–1662.

[8] Y. S. Moon, P. Park, W. H. Kwon, Y. S. Lee, Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems, *International Journal of Control*, **74** (2001), 1447–1455.

[9] J. Ren, Resilient robust H_∞ fuzzy controller design for a class of nonlinear systems with time-varying delays in states, *2008 IEEE Conference on Cybernetics and Intelligent Systems*, DOI: 10.1109/ICCIS.2008.4670824.

[10] Z. Wang, H. Qiao, H_∞ reliable control of uncertain linear state delayed systems, *Journal of Dynamical and Control Systems*, **10** (2004), 55–76.

[11] Y. Wang, L. Xie, C. E. de Souza, Robust control of a class of uncertain nonlinear systems, *Systems and Control Letters*, **19** (1992), 139–149.

[12] L. Wang, Y. Zhang, Z. Zhang, Y. Wang, LMI-based approach for global exponential robust stability for reactiondiffusion uncertain neural networks with time-varying delay, *Chaos, Solitons and Fractals*, **41** (2009), 900–905.

[13] L. Xie, Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty, *International Journal of Control*, **63** (1996), 741–750.

[14] H. Yan, X. Huang, H. Zhang, M. Wang, Delay-dependent robust stability criteria of uncertain stochastic systems with time-varying delay, *Chaos, Solitons and Fractals*, **40** (2009), 1668–1679.

[15] Y. Zhang, Y. He, M. Wu, Delay-dependent robust stability for uncertain stochastic systems with interval time-varying delay, *Acta Automatica Sinica*, **35** (2009), 577–582.

[16] X. Zhao, M. Ling, Q. Zeng, Delay-dependent robust control for uncertain stochastic systems with Markovian switching and multiple delays, *Journal of Systems Engineering and Electronics*, **21** (2010), 287–295.